

КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ОДНОМ КЛАССЕ МОДЕЛЕЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМУМА УСРЕДНЕННОГО ПО ВРЕМЕНИ КАЧЕСТВА*

А.Г. Нагиев¹, Ф.А. Алиева², Г.А. Нагиев³

¹Сумгаитский Государственный Университет

²Бакинский Государственный Университет

³Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

e-mail: nashfn@hotmail.ru

Резюме. Исследуются динамические свойства одного класса моделей в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процессы конвективного переноса вещества при наличии химического превращения. Характерной особенностью является то, что часть уравнений системы описывает продольное движение газовой и жидкой фаз, а часть моделируют процессы в неподвижной твердой среде фильтрационного течения. На основании разделимости процессов по характеристическим временам предложен упрощенный вариант модели, которая имеет особенности в динамике. Показывается эффективность искусственно создаваемых нестационарных режимов, эффективные с точки зрения усредненного качества.

Ключевые слова. Модель конвективного переноса вещества, уравнения в частных производных, колебательное управляющее воздействие, нелинейная динамика.

AMS Subject Classification: 35B10

1. Введение

Целый ряд моделей промышленных технологических процессов представляет собой дифференциальные уравнения в частных производных. Такие объекты встречаются в химической, нефтеперерабатывающей промышленности, а также в пищевой и фармацевтической отраслях производства. Эта категория объектов часто представляется в виде систем, частично включающих уравнения конвективного переноса вещества, а часть уравнений могут не включать производные по пространственной координате. Структура взаимосвязей между переменными состояния таких моделей оказываются таковыми, что вследствие колебательных процессов, создающихся за счет периодического изменения производительности или других параметров управления, может появляться значительный рост выходных показателей эффективности процесса.

Среди первых работ, в которых было обращено внимание на возможность достижения большей эффективности от применения искусственно создаваемых колебаний, можно отметить работы [1-5]. Далее

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 23.10.2018

применение этой концепции нашло бурного развития [6-9]. Периодически меняющиеся во времени управляющие воздействия, находя колебательное распространение, создают некоторый устойчивый вид распределения параметра состояния по пространственным координатам объекта. В переходных режимах эти распределения эволюционируют во времени.

Реакции объектов с распределенными параметрами на внешние воздействия весьма специфичны. В то же время можно выделить определенные классы промышленных процессов с характерными особенностями колебательных движений. Колебательные переходные режимы могут устанавливаться как по температуре, так и по материальным потокам. Причем в объектах, представляемых подобным видом уравнений, могут наблюдаться стационарные волновые распределения названных параметров состояния. Целью настоящего исследования являлось изучение динамических свойств одного типа моделей трубчатых реакторов и раскрытие основных закономерностей влияния фигурирующих в них таких параметров, как скорость ввода материальных потоков, концентрация их состава на выходные параметры. Практический интерес представляет создание алгоритма комплексного исследования искусственно создаваемых нестационарных (гармонических и импульсных) режимов, в которых можно найти эффективные с точки зрения конечных результатов по принятым критериям управления.

2. Вид исследуемой математической модели. Постановка задачи

Настоящее исследование базировалось на модели функционирования реакторов со стационарным слоем крупнозернистого катализатора. Объектом выбрана промышленная установка гидроочистки высокосернистого моторного топлива в непрерывном потоке водородсодержащего газа и сырья [10]. Эти процессы являются типичными представителями объектов с распределенными параметрами по продольной координате реакторов. Каталитическая реакция соединения водорода с серосодержащими веществами в составе очищаемых продуктов происходит на поверхности пористого катализатора. Параллельно с химическими процессами имеют места процессы абсорбции молекул водорода в жидкую фазу, адсорбции молекул обеих фаз на поверхность катализатора, а также процесс десорбции. Математическая модель, учитывающая эти физические процессы, могут быть представлены в виде дифференциальных уравнений в частных производных [11]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial t} - v_q \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma_y \rho_y}{\sigma_q \rho_q} w_{qy} (cP y_1 - p) &= 0; \\
 \frac{\partial y_1}{\partial t} - v_y \frac{\partial y_1}{\partial x} - \frac{\sigma_q \rho_q}{\sigma_y \rho_y} [w_{qy} (cP y_1 - p) + w_{1yk} (a_{1yk} y_1 - z_1)] &= 0; \quad i = \overline{1,3}; \\
 \frac{\partial y_2}{\partial t} - v_y \frac{\partial y_2}{\partial x} + \frac{\delta_k (1 - \sigma_q - \sigma_y)}{\sigma_y \rho_y} w_{2yk} (a_{2yk} y_2 - z_2) &= 0 \\
 \frac{\partial y_3}{\partial t} - v_y \frac{\partial y_3}{\partial x} - \frac{\delta_k (1 - \sigma_q - \sigma_y)}{\sigma_y \rho_y} w_{3yk} (a_{3yk} y_3 - z_3) &= 0 \\
 \frac{dP}{dx} &= \gamma_y v_y + \gamma_q v_q; \tag{1} \\
 \frac{\partial z_1}{\partial t} - \frac{\sigma_q \rho_q}{\delta_k (1 - \sigma_q - \sigma_y)} [w_{1yk} (a_{1yk} y_1 - z_1) + 2z_1 z_2 k_T] &= 0 \\
 \frac{\partial z_2}{\partial t} - \frac{\sigma_y \rho_y}{\delta_k (1 - \sigma_q - \sigma_y)} [w_{2yk} (a_{2yk} y_2 - z_2) + z_1 z_2 k_T] &= 0 \\
 \frac{\partial z_3}{\partial t} + \frac{\sigma_y \rho_y}{\delta_k (1 - \sigma_q - \sigma_y)} [w_{3yk} (a_{3yk} y_3 - z_3)] &= 0
 \end{aligned}$$

Конкретное физическое содержание фигурирующих в (1) параметров следующее:

σ_q, σ_y – Доли сечения, занятые газовыми пузырями и жидкой фазой соответственно; p – парциальное давление водорода в газовой фазе; $y_i; i = \overline{1,3}$ – концентрации в жидкой фазе водорода ($i = 1$), сернистых соединений ($i = 2$) и сероводорода ($i = 3$); v_q, v_y – объемные скорости ввода газовой и жидкой фаз; $z_i; i = \overline{1,3}$ – концентрация тех же веществ в порах катализатора; P – давление в реакторе; ρ_q, ρ_y – плотности газовой и жидкой фазы; γ_y, γ_q – коэффициенты потери напора в фильтрационном течении жидкости и газа; $w_{iqy}, w_{iyk}; i = \overline{1,3}$ – скорости массопередачи между фазами «газ-жидкость» и «жидкость-твердая фаза» в соответствие индексации по номерам веществ; C – коэффициент линейного приближения

растворимости водорода; $a_{iyk}; i = \overline{1,3}$ – коэффициенты адсорбции в твердую фазу (катализатора); δ_k – адсорбционная ёмкость катализатора; k_T – кинетический параметр реакции удаления серы.

Обозначение в модели	Единицы измерения	Числовое значение	Обозначение в модели	Единицы измерения	Числовое значение
v_q	[м/ч]	12000	w_{qy}	т/ч	760
v_y	[м/ч]	30	w_{1yk}	т/ч	2976
σ_k	-	0.72	w_{2yk}	т/ч	3246
σ_q	-	0.16	w_{3yk}	т/ч	4123
σ_y	-	0.12	a_{1yk}	-	0.124
δ	т/м ³	0.036	a_{2yk}	-	0.181
γ_y	[Па ч/м ²]	0.0084	a_{3yk}	-	1.043
γ_q	[Па ч/м ²]	2.086×10^{-5}	c	Па ⁻¹	7917
k_T	-	1.05×10^7			

Прокомментируем математическую структуру этой модели в связи с ее физической сущностью. Отметим, что ее характерной особенностью является то, что пять первых уравнений этой системы описывают продольное движение газовой и жидкой фаз (модель фильтрационного течения), массообмен между фазами и химический процесс удаления серы, а последующие уравнения описывают процессы, происходящие в неподвижной диспергированной среде. С другой стороны процессы в неподвижной среде по своим характерным временам релаксации существенно превосходят времен переходных тепловых и концентрационных состояний реактора, следовательно, могут рассматриваться квазистационарными. Это позволяет описывать эти процессы алгебраически, пренебрегая динамикой быстротечных переходных состояний. Именно вследствие этого скорости абсорбции водорода в жидкую фазу и адсорбции жидкости в пористую структуру катализатора в вышеприведенной системе удастся выразить в виде соответствующих статических соотношений:

$$\begin{aligned} \varphi_{qy}(y_i, p_i) &= w_{qy}(cP y_1 - p); \\ \varphi_{iyk}(y_i, z_i) &= w_{iyk}(b_{iyk} y_i - z_i); i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Нами проведена параметрическая идентификация данной модели по статистическим данным промышленного процесса. Числовые значения идентифицированной модели приведены в таблице 1.

3. Особенности реакции системы на гармонические и импульсные воздействия

Рассмотрим движение системы с произвольного начального состояния, в частности, пусть начальный концентрационный профиль соответствует равномерному распределению. При

$$t = 0 \text{ имеем: } p(0, x) \equiv \bar{p}; \quad y_i(0, x) \equiv \bar{y}_i; \quad z_i(0, x) \equiv \bar{z}_i, \quad (3)$$

где через $\bar{p}, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ – обозначены средние значения переменных состояния системы.

Выпишем левосторонние граничные условия, приняв во внимание, что при $x = 0$ и любых $t > 0$ переменные состояния $p(t, 0), y_i(t, 0), z_i(t, 0)$ определены как известные функции времени, сформированные на входном потоке реактора, и могут иметь как постоянные значения, так и являться известной функцией времени, в частности:

при $x = 0$ имеем :

$$p(t, 0) = p_0(t); \quad y_i(t, 0) = y_{i0}(t); \quad P(t, 0) = P_{gir}(t) \quad (4)$$

В целях создания нестационарных режимов посредством гармонических внешних воздействий (возможно, и импульсных) введем в (1) следующие функции управления входными материальными потоками:

$$\begin{aligned} v_q(t) &= v_q^0 + A_q \sin(\omega t); \\ v_y(t) &= v_y^0 + A_y \sin(\omega t + \varphi); \quad 0 < \varphi < \pi / 2; \\ 0 < h_q / v_q^0 &< 0.5; \quad 0 < h_y / v_y^0 < 0.5; \end{aligned} \quad (5)$$

где \bar{v}_q, \bar{v}_y – числовые значения технологической нормы,

A_q, A_y – варьируемые параметры задачи исследования.

Функции $v_q(t)$ и $v_y(t)$ при импульсном управлении скоростью состоят из следующих сумм:

$$\begin{aligned} v_q(t) &= \bar{v}_q + A_q s_q(t); \\ v_y(t) &= \bar{v}_y + A_y s_y(t), \end{aligned} \quad (6)$$

в которой импульсы представлены в виде:

$$s_q(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.5]\tau + n\tau; \\ 0, & t \in [0.5, 1]\tau + n\tau. \end{cases} \quad (7)$$

$$s_y(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.5]\tau + \tau_\varphi + n\tau; \\ 0, & t \in [0.5, 1]\tau + \tau_\varphi + n\tau. \end{cases}$$

где τ – период повторения прямоугольных импульсов со скважностью, равной 2; τ_φ – время задержки (фазовый сдвиг) между двумя сериями импульсов ввода газового и жидкостного потоков.

Практический интерес представлял исследование данной модели относительно ее реакции на гармоническое и импульсное изменение параметров $v_q(t)$, $v_y(t)$ при варьировании частоты ω (или периода повторения τ при импульсном воздействии), а также фазы φ (или τ_φ). Наибольшим удобством при проведении вычислительных экспериментов на модели (1), как выяснилось, обладает «г-образный шаблон» разностной аппроксимации производной и построение вычислений по явной схеме.

На рис.1 показано изменение во времени концентрационного профиля по продольной координате модели (1), которое получено при синусоидальном законе управления как функции $v_q(t)$, так и $v_y(t)$. Варьировались значения гармонических параметров в интервалах $0 < \omega < 153$, $0.2 < \varphi < 1.75$.

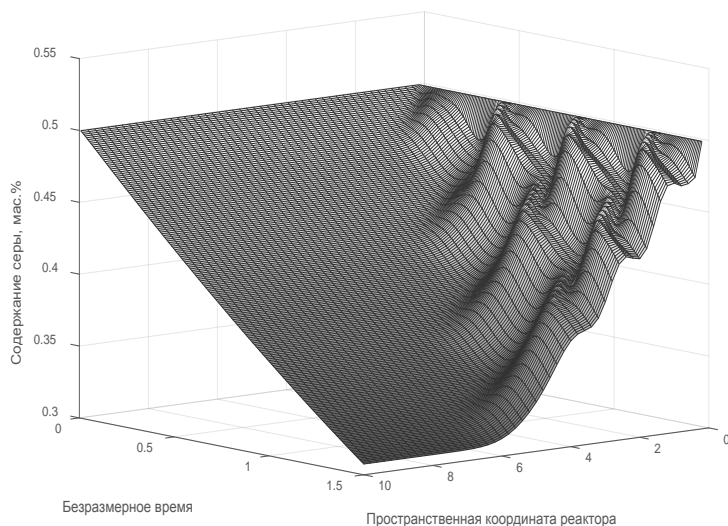


Рис.1. Эволюция волнового распространения гармонического возмущения по продольной координате реактора при частоте $\omega = 153 \text{ рад/ч}$ и фазовом сдвиге $\varphi = 1.2 \text{ рад}$.

Гармонический характер переходных режимов остается неизменным в любом наборе параметров, включая и режим ввода без сдвигов между фазами. Качество управления оценивалось по величине $y_3(L)$ (концентрация сероводорода – показателя сероочищенности сырья). Данный показатель проходит через максимум при значении сдвигового параметра φ , меняющегося в интервале (1.2 – 1.67).

Импульсное управление тем же параметром со средним, номинальным значением не дало существенных расхождений в концентрационных профилях модели реактора. Прямоугольные импульсы, быстро сглаживаясь, трансформируются в гармонические формы на начальных отметках пространственной координаты (рис.2).

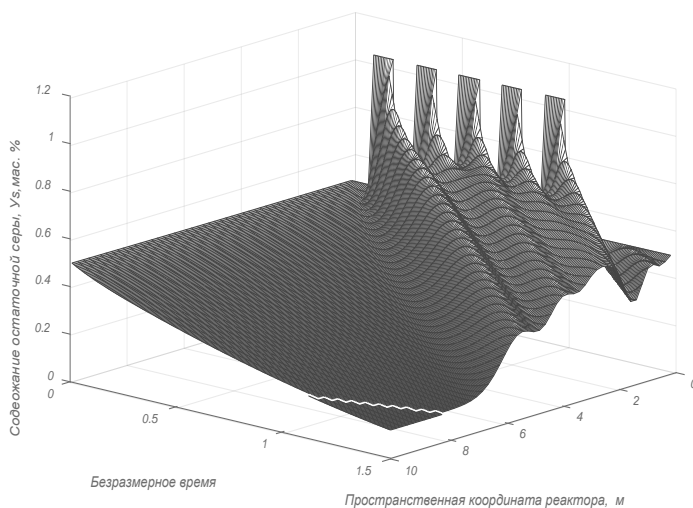


Рис.2. Нестационарный режим при импульсном управлении скоростью потоков с параметрами: $\tau = 0.034 \text{ ч}$, $\tau_\varphi = 0.011 \text{ ч}$.

4. Анализ максимума среднего значения качества

Пусть критерием качества функционирования системы (1) принято усредненное в течение некоторого времени (эффективное значение) переменной состояния $y_3(t, x)$ на отметке $x = L$ пространственной координаты. Вычислительный эксперимент, проведенный в целях анализа

совместного влияния параметров модели $\bar{v}_y, \bar{v}_q, \omega, \varphi$ на данный критерий качества, способствует выявлению важного свойства модели (1).

Нами проведены две серии вычислительных экспериментов с использованием следующего интеграла от право крайнего значения переменной состояния $y_3(t, x)$, т.е.:

$$I(\bar{v}_y, \bar{v}_q, \omega, \varphi) = \int_0^{T_k} y_3(t, L) dt \quad (8)$$

где функция $y_3(t, L)$ определена как решение системы (1) при заданных параметрах $\bar{v}_y, \bar{v}_q, \omega, \varphi$; T_k – время прохождения вещества расстояния $x = L$ (длины реактора) при заданной скорости.

В одной серии экспериментов параметры \bar{v}_y, \bar{v}_q заметно превосходили своих номинальных значений, в частности $\bar{v}_y^* = 1.3\bar{v}_y$; $\bar{v}_q^* = 1.2\bar{v}_q$ (поверхность 1 на рис 3). Другая серия соответствовала именно номинальным значениям этих параметров. Сравнительное оценивание результатов по данному критерию дало важный вывод о существовании положительных эффектов в применении целенаправленных нестационарных управлений состоянием модели (1). На графике рис.3 заметно существование максимума (на поверхности 2) по сдвиговому параметру. Этот эффект находит себе место лишь в определенном значении параметров \bar{v}_y, \bar{v}_q . Функция $y_3(t, L)$ весьма чувствительна к частоте гармонических составляющей.

Таким образом, рассматриваемая модель относительно критерия (8) имеет в заданном ограниченном диапазоне параметров $\bar{v}_y, \bar{v}_q, \omega, \varphi$ максимум, которого необходимо достичь варьированием названных параметров. Аналитическое определение экстремума функционала (8) по названным параметрам не представляется возможным. Лишь благодаря численно проведенному анализу удалось обнаружить высокую корреляционную связь между отношением параметров модели w_{qy} / w_{1yk} и найденным эффектом.

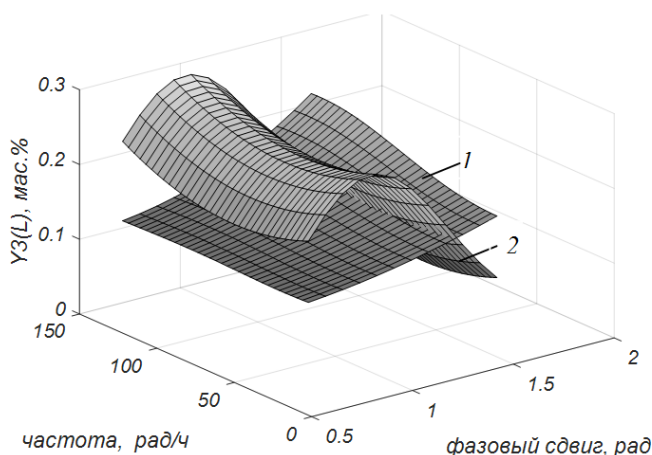


Рис.3. Чувствительность решений к частоте и фазе гармонических воздействий при двух разных значениях параметра управления \bar{v}_y, \bar{v}_q .

Заключение

В заключении отметим, что построенная математическая модель, результаты численного исследования ее нестационарных решений на чувствительность к частоте и фазе гармонических и импульсных управляющих воздействий, центрируют внимание на данной модели с точки зрения особенностей ее поведения в динамике.

Данная структура модели весьма типична для ряда моделей промышленных процессов и поэтому ее более подробный анализ может послужить не только эффективности решения конкретной прикладной задачи, но и выявлению определенных математических оснований на которых, порождено обнаруженное свойство модели.

Литература

1. Бутковский А.Г., Полтавский Л. Н. Оптимальное управление распределенной колебательной системой, Автоматика и телемеханика. 1965. Т. 26. N. 11. С. 1900–1914.
2. Барелко В.В., Мержанов А.Г. Новые явления в нестационарном катализе, Проблемы кинетики и катализа. Т. 17. Нестационарные и неравновесные процессы в гетерогенном катализе. М.: Наука. 1973. с. 182–186.
3. Жаботинский А.М. Концентрационные колебания. М: Наука. 1974. 178 с.
4. Матрос Ю.Ш. Нестационарные процессы в каталитических реакторах. Новосибирск: Наука. 1982.

5. Matros Yu.Sh. Unsteady Processes in Catalytic Reactors. Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, Elsevier. 1985.
6. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. с. 254.
7. Михайлов Ф.А., Теряев Е.Д., Булеков В.П. Динамика нестационарных линейных систем. М., Наука, 1967, 368 с.
8. Wilson B., Sherrington D.C., Ni X. Butylation of Phenylacetonitrile in an Oscillatory Baffled Reactor, *Ind. Eng. Chem. Res.* 2005. 44(23). p. 8663–8670.
9. Reis N., Pereira R.N., Vicente A.A., Teixeira J.A. Enhanced Gas-Liquid Mass Transfer of an Oscillatory Constricted-Tubular Reactor, *Ind. Eng. Chem. Res.* 2008. 47(19). p. 7190–7201.
10. Суханов В.П. Каталитические процессы в нефтепереработке, М.: Химия, 1979, 416 с.
11. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии, Москва : Химия, 1985.

Vibrational management in one class models with differential equations in partial derivatives with the criterion of maximum average quality

A.G. Nagiyev¹, F.A. Aliyeva², G.A. Naghiev³

¹Sumgait State University, Sumgait, Azerbaijan

²Baku State University, Baku, Azerbaijan

³Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences

e-mail: nashfn@hotmail.ru

ABSTRACT

Dynamic properties of one class of models in the form of a system of partial differential equations describing the processes of convective transport of a substance in the presence of a chemical transformation are investigated. A characteristic feature is that some of the equations of the system describe the longitudinal motion of the gas and liquid phases, while some simulate processes in a stationary solid medium of the filtrational flow. On the basis of the separation of processes by characteristic times, a simplified version of the model, which has features in dynamics, is proposed. The effectiveness of artificially created non-stationary regimes, effective from the point of view of the average quality are shown.

Keywords. Model of convective transport of matter, partial differential equations, oscillatory control action, nonlinear dynamics.

References

1. Butkovskiy A.G., Poltavskiy L N. Optimalnoe upravlenie raspredelennoy kolebatelnoy sistemoy , *Avtomatika i telemekhanika*. 1965. T. 26. 11. s. 1900–1914. (Butkovskii A.G., Poltavskii L.N. Optimal control of the

- distributive oscillating system, Automation and Remote Control. V. 26, N. 11, 1965. pp. 1900-1914.) (in Russian)
2. Barelko V.V., Merzhanov A.G. Novyye yavleniya v nestatsionarnom katalize , Prob-lemyi kinetiki i kataliza. V. 17. Nestatsionarnyye i neravnovesnyie protsessyi v geterogen-nom katalize. M.: Nauka. 1973. s. 182–186. (Barelko V.V., Merzhanov A.G. New phenomena in nonstationary catalysis , Problems of kinetics and catalysis. V. 17. Nonstationary and non-equilibrium processes in heterogeneous catalysis. M .: Science. 1973, pp. 182-186.) (in Russian)
 3. Zhabotinskiy A.M. Kontsentratsionnyie kolebaniya. M: Nauka. 1974. 178 s. (Zhabotinsky A.M. Concentration oscillations. M: Science. 1974. 178 p.)
 4. Matros Yu.Sh. Nestatsionarnyye protsessyi v kataliticheskikh reaktorah. Novosibirsk: Nauka. 1982. (Matros Yu. Sh. Nonstationary processes in catalytic reactors. Novosibirsk: Science. 1982.) (in Russian)
 5. Matros Yu.Sh. Unsteady Processes in Catalytic Reactors. Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, Elsevier. 1985.
 6. Kononenko V.O. Kolebatelnyie sistemyi s ogranichennyim vozbuzhdeniem.M.: Nauka, 1964. s. 254. (Kononenko V.O. Vibrational systems with limited excitation. M .: Science, 1964. p. 254.) (in Russian)
 7. Mihaylov F.A., Teryaev E.D., Bulekov V.P. Dinamika nestatsionarnyih lineynyih si-stem. M., Nauka, 1967, 368 s. (Mikhailov FA, Teryaev ED, Bulekov V.P. Dynamics of non-stationary linear systems. M., Science, 1967, 368 p.1) (in Russian)
 8. Wilson B., Sherrington D. C., Ni X. Butylation of Phenylacetonitrile in an Oscillatory Baffled Reactor, Ind. Eng. Chem. Res. 2005. 44 (23). p. 8663-8670.
 9. Reis N., Pereira R.N., Vicente A. A., Teixeira J.A. Enhanced Gas-Liquid Mass Transfer of an Oscillatory Constricted-Tubular Reactor, Ind. Eng. Chem. Res. 2008. 47 (19). p. 7190-7201.
 10. Suhanov V.P. Kataliticheskie protsessyi v neftepererabotke, M.: Himiya. 1979. 416 s. (Sukhanov V.P. Catalytic processes in oil refining , M .: Chemistry. 1979. 416 p.) (in Russian)
 11. Kafarov V.V. Metodyi kibernetiki v himii i himicheskoy tehnologii. Moskva : Himiya, 1985. (Kafarov V.V. Methods of Cybernetics in Chemistry and Chemical Technology. Moscow: Chemistry, 1985.) (in Russian)